DISTRIBUTIETHEORIE, cursus 2003–2004.

Eerste herhalingstentamen, woensdag 7 april 2002 , duur: 3 uur.

1.[1] De onderdelen (a) en (b) van deze opgaven zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[5] (i) Bereken $x^2 \mathrm{hw}\,\frac{1}{x}$. (ii) Druk $x\delta'$ uit in δ. (iii) Bepaal *alle* distributies T die voldoen aan $x^2T = x$. Welke stelling gebruik je? (iv) Bepaal vervolgens *alle* distributies T die voldoen aan $x^2T = x$ en homogeen zijn van de graad -1. Bewijs je beweringen.
(b)[4] (i) Wat is een getemperde distributie op $\mathbb{R}$? (ii) Bewijs dat als $f(x) = x^{2004}$, dan is $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2.[1] De onderdelen (a) en (b) zijn van elkaar onafhankelijk.
(a)[5] (i) Toon aan dat door

$$< T, \varphi >= \int_{\mathbf{R}} \varphi(x, -x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

een distributie $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ gedefineerd wordt. (ii) Bepaal de drager van T en bewijs je antwoord. (iii) Bereken

$$(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})T.$$

(b)[4] Los met behulp van de symboolrekening in $\mathcal{D}'_+$ de functie $f(x)$ op uit de integraalvergelijking

$$\int_0^x \sin(x-y)f(y)dy = g(x), \ x \geq 0,$$

waarin $g(x)$ een gegeven C^2-functie is met $g(0) = g'(0) = 0$.

3.[1] (a)[4] (i) Stel $P_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$. Bereken $P_a * P_b$ voor $a > 0, b > 0$, als gegeven is dat

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-a|x|})(y) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 y^2}, \quad a > 0.$$

(ii) *Hoe* gebuik je *welke* inversiestelling?
(b)[5] (i) Bepaal voor $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de Fouriergetransformeerden van T' en $2\pi i x T$. (ii) Toon aan dat de Fouriergetransformeerde van een even (oneven) distributie weer even (resp. oneven) is. (iii) Bepaal de Fouriergetransformeerde van de distributie S = signum (De functie signum$\,x$ is 1 als $x > 0$ en is -1 als $x < 0$). (iv) Geef de algemene inversieformule voor de Fouriertransformatie op $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (v) Bepaal de Fouriergetransformeerde van hw $\frac{1}{x}$.